

MEDIA MENGAJAR

Matematika

UNTUK SMK KELAS XI



Kurikulum Merdeka

Matematika

SMK/MAK



BAB 2

Fungsi Komposisi dan Invers

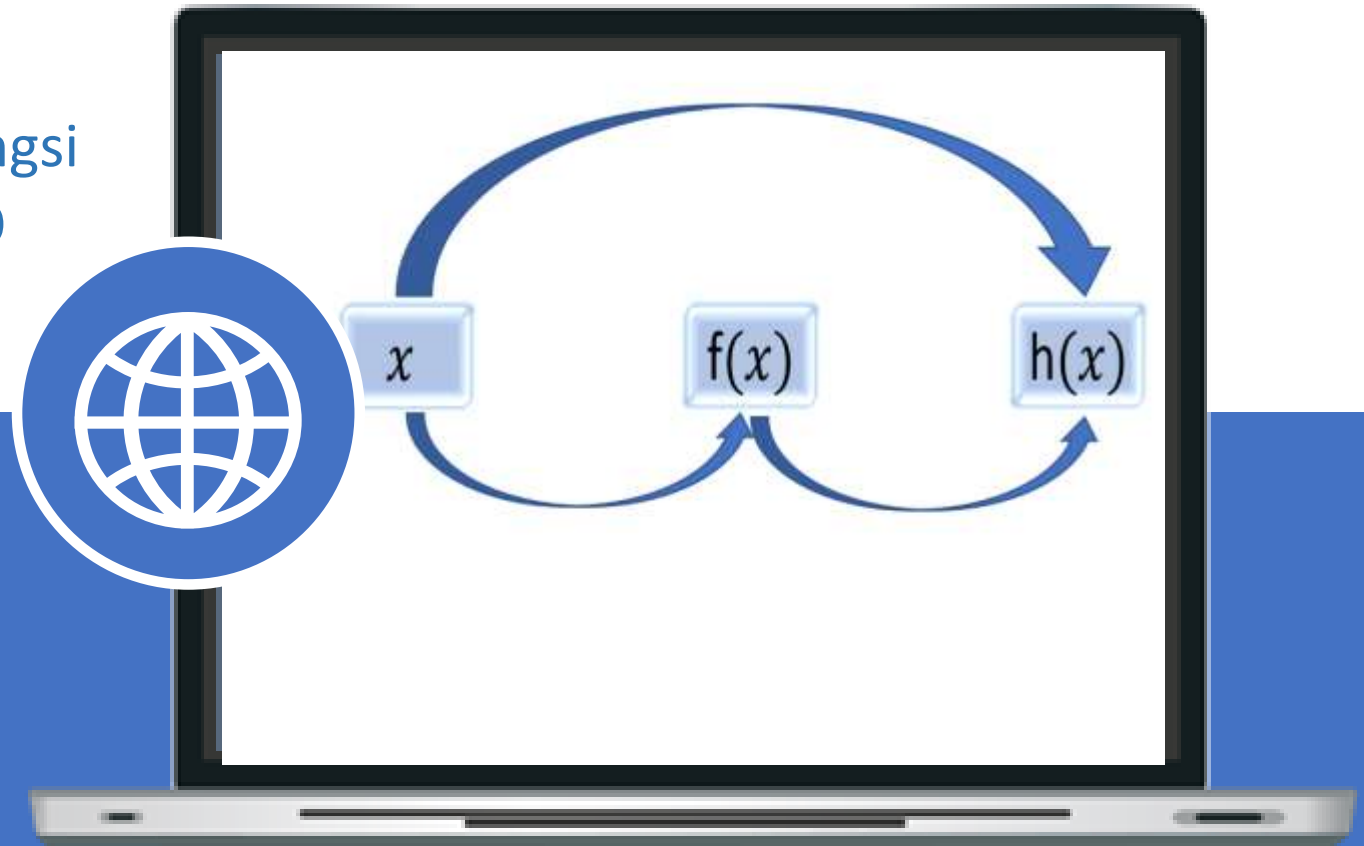


Peta Konsep



DEFINISI FUNGSI KOMPOSISI

Misalkan terdapat dua fungsi, yaitu fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan $D_f \cap R_g \neq \emptyset$



$f(x)$ komposisi $g(x)$ ditulis $(f \circ g)(x)$
didefinisikan sebagai:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$



NILAI FUNGSI KOMPOSISI

Contoh: $f(x) = 3x + 4$, $g(x) = 5 - 2x$, Tentukan $(f \circ g)(x)$

Dapat diperoleh dengan dua cara

Cara 1

Dengan menentukan fungsi komposisinya terlebih dahulu, kemudian masukkan nilai variabel ke dalam fungsi komposisi.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 3(g(x)) + 4 \\ &= 3(5 - 2x) + 4 \\ &= 19 - 6x \\ (f \circ g)(x) &= 19 - 6(5) \\ &= 19 - 30 \\ &= -11\end{aligned}$$

Cara 2

Dengan memasukkan nilai variabel ke dalam fungsi secara berurutan

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ g(x) &= 5 - 2x \\ g(5) &= 5 - 10 = -5 \\ f(x) &= 3x + 4 \\ f(g(5)) &= 3(g(5)) + 4 \\ f(-5) &= 3(-5) + 4 \\ &= -11\end{aligned}$$



MENENTUKAN FUNGSI DARI FUNGSI KOMPOSISI YANG DIKETAHUI

Misalkan terdapat fungsi komposisi $f \circ g$.
Jika ada salah satu fungsi yang telah diketahui (f atau g), hanya ada satu kemungkinan rumus fungsi yang lain.

Contoh:

Diketahui fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = 3x - 2$

Jika $f(x) = 3x + 1$, tentukan fungsi $g(x)$

$$(f \circ g)(x) = 3x - 2$$

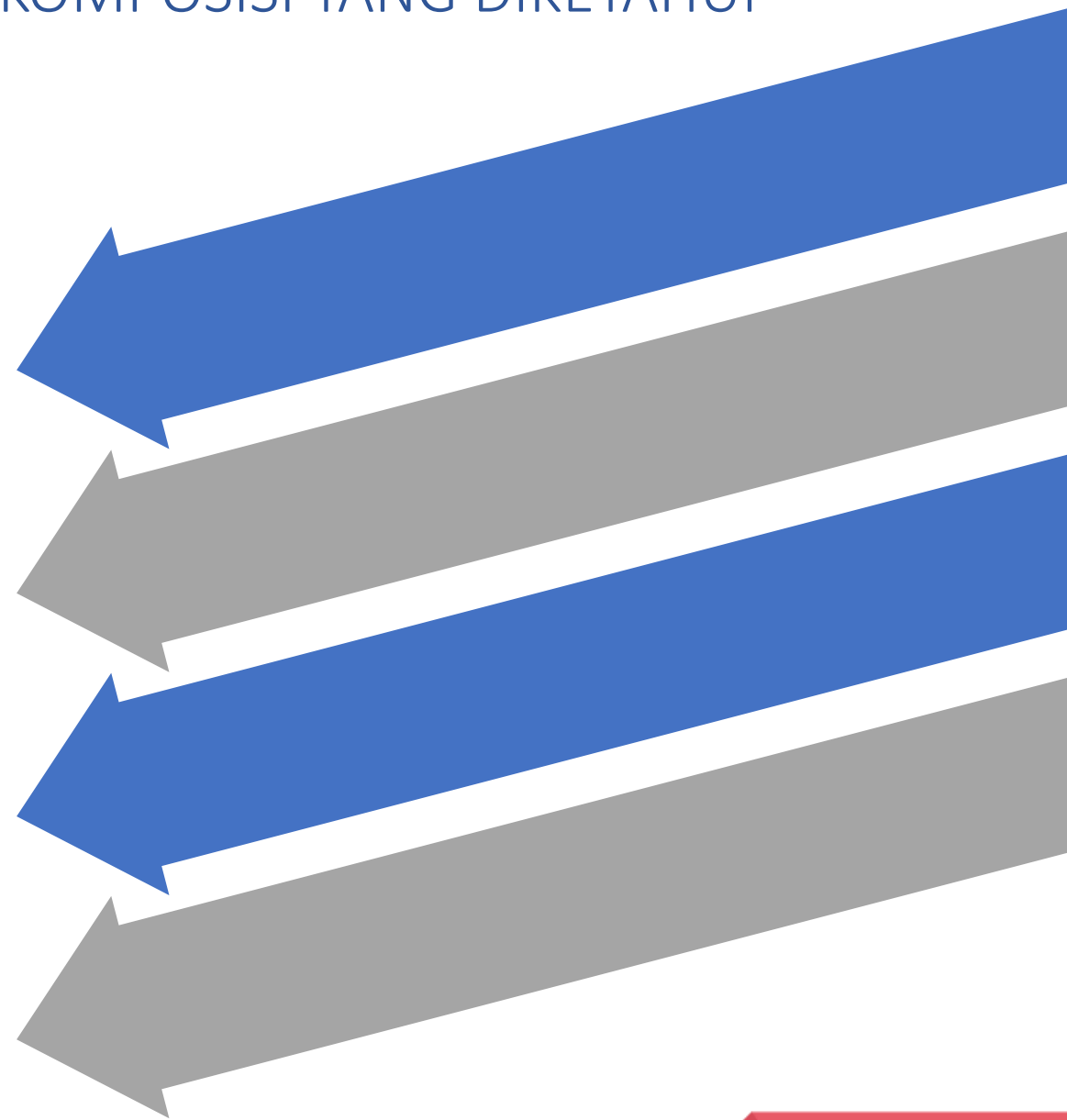
$$f(g(x)) = 3x - 2$$

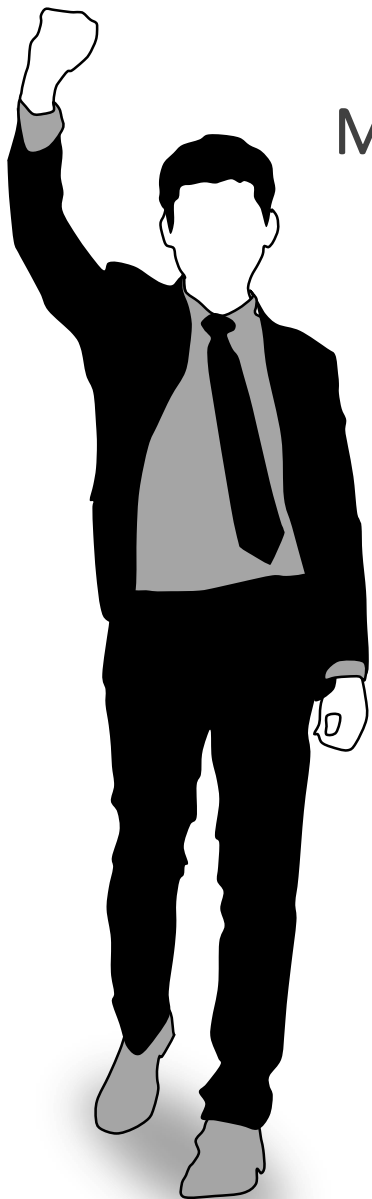
$$3(g(x)) + 1 = 3x - 2$$

$$3(g(x)) = 3x - 3$$

$$3(g(x)) = 3(x - 1)$$

$$g(x) = x - 1$$





Menyelesaikan Masalah Fungsi Komposisi

1

Menganalisis teks

2

Memberi label kuantitas yang tidak diketahui dengan huruf (variable)

3

Mengubah pernyataan verbal ke dalam model matematika berbentuk fungsi

4

Melakukan prosedur penyelesaian untuk menentukan nilai variable yang dicari

5

Melakukan interpretasi hasil sesuai pertanyaan



CONTOH



Sebuah biji tanaman jatuh di permukaan air yang tenang hingga mengakibatkan terjadinya riak melingkar. Luas riak yang ditimbulkan setelah t detik merupakan fungsi komposisi $(L \circ r)(x)$ dengan $L(x)$ adalah fungsi untuk menentukan luas lingkaran dengan jari-jari x cm, sedangkan $r(x)$ adalah jari-jari riak air (dalam cm) setelah x detik. Jika $(L \circ r)(x) = 9\pi x^2$, tentukan fungsi $r(x)$ dan tuliskan interpretasinya.

PENYELESAIAN

Ingat rumus luas lingkaran adalah $L = \pi r^2 \rightarrow L = \pi x^2$

$$(L \circ r)(x) = 9\pi x^2$$

$$L(r(x)) = 9\pi x^2$$

$$\pi(r(x))^2 = 9\pi x^2$$

$$\pi(r(x))^2 = 9\pi x^2$$

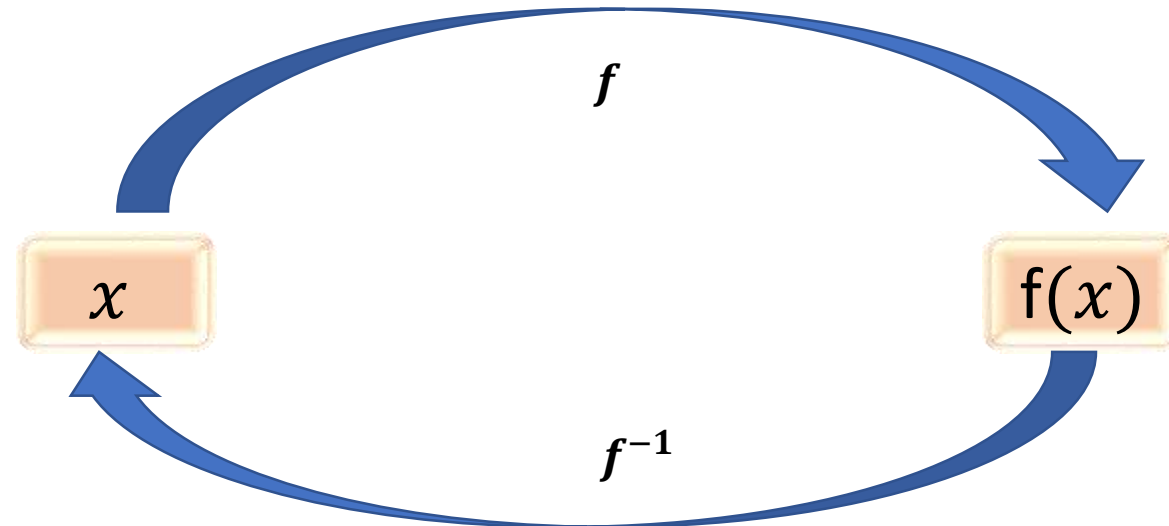
$$r(x) = 3x$$

Artinya, jari-jari riak air bertambah 3 cm setiap detik



DEFINISI FUNGSI INVERS

Misalkan terdapat fungsi f memetakan x ke $f(x)$ seperti yang diilustrasikan dengan diagram panah berikut.

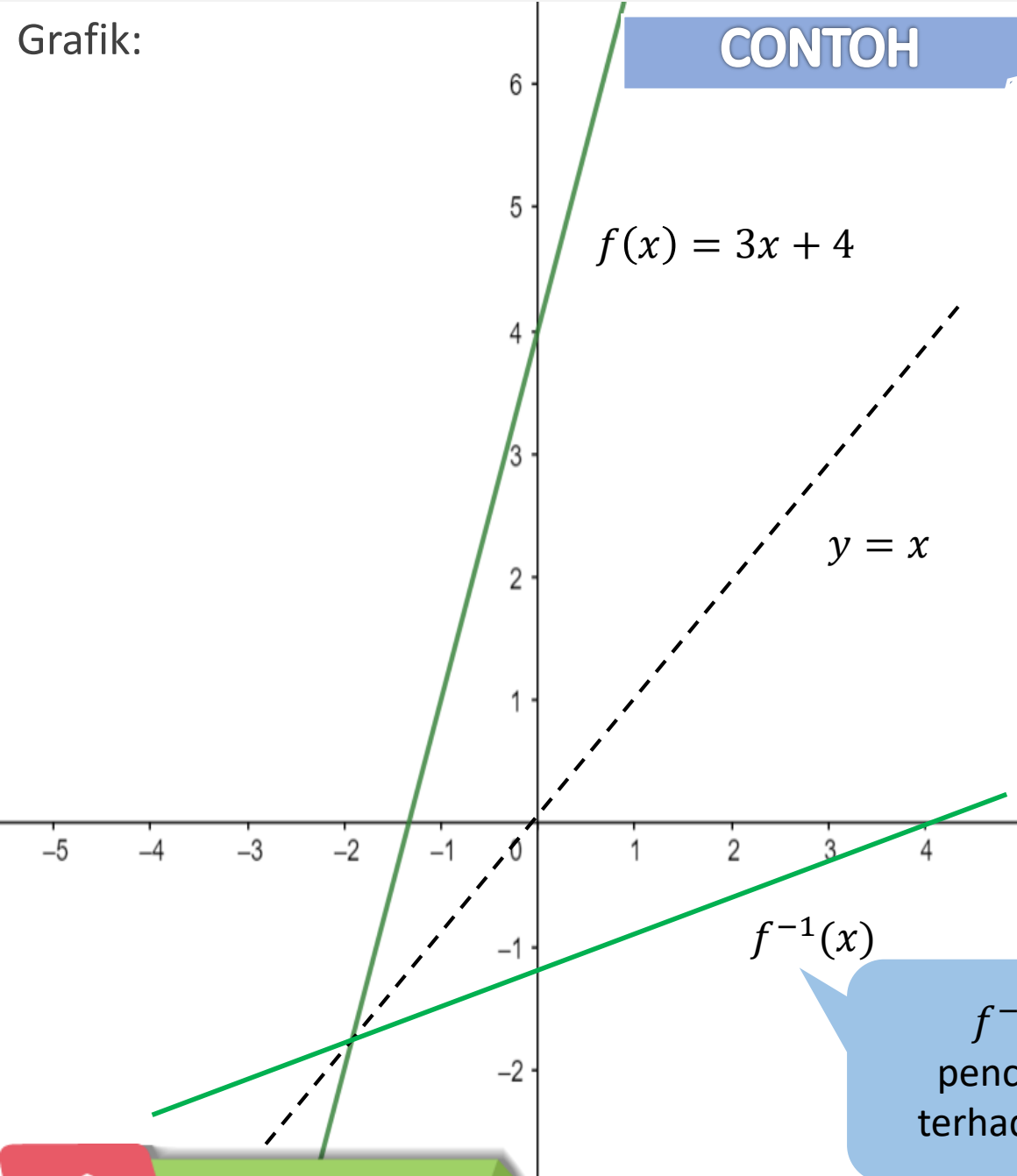


Invers dari fungsi f ditulis sebagai f^{-1}

Sebuah fungsi f mempunyai fungsi invers (kebalikan) f^{-1} jika f adalah fungsi satu-satu dan fungsi pada (bijektif).



Grafik:



Diketahui $f(x) = 3x + 4$, tentukan $f^{-1}(x)$ dan $f^{-1}(-5)$

PENYELESAIAN

$$f(x) = 3x + 4$$

Misalkan $y = f(x)$, maka:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f^{-1}(y) = x$$

Sehingga,

$$f(x) = 3x + 4$$

$$y = 3x + 4$$

$$y - 4 = 3x$$

$$\frac{y - 4}{3} = x$$

$$\frac{y - 4}{3} = f^{-1}(y)$$

$$\frac{x - 4}{3} = f^{-1}(x)$$

$f^{-1}(x)$ adalah pencerminan $f(x)$ terhadap garis $y = x$



FUNGSI KOMPOSISI YANG MELIBATKAN FUNGSI INVERS

PENYELESAIAN

Misalkan $y = g(x)$, maka:

$$g^{-1}(g(x)) = x$$

$$g^{-1}(y) = x$$

Sehingga,

$$g(x) = 5 - 2x$$

$$y = 5 - 2x$$

$$2x = 5 - y$$

$$x = \frac{5 - y}{2}$$

$$g^{-1}(y) = \frac{5 - y}{2}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{5 - x}{2}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g^{-1})(x) &= f(g^{-1}(x)) \\ &= 3(g^{-1}(x)) + 4 \\ &= 3\left(\frac{5-x}{2}\right) + 4 \\ &= \frac{15-3x}{2} + \frac{8}{2} \\ &= \frac{23-3x}{2}\end{aligned}$$

Untuk $x = 2$, diperoleh:

$$(f \circ g^{-1})(x) = \frac{23 - 3x}{2}$$

$$(f \circ g^{-1})(2) = \frac{23 - 3 \cdot 2}{2}$$

$$(f \circ g^{-1})(2) = \frac{23 - 6}{2}$$

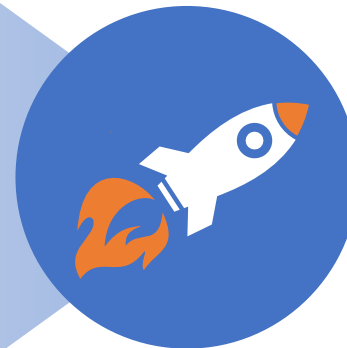
$$(f \circ g^{-1})(2) = \frac{17}{2}$$

Tentukan fungsi komposisinya terlebih dahulu, kemudian masukkan nilai variabel ke dalam fungsi komposisi atau dengan memasukkan nilai variabel ke dalam fungsi secara berurutan.

CONTOH

Diketahui $f(x) = 3x + 4$ dan $g(x) = 5 - 2x$.

Tentukan nilai dari $(f \circ g^{-1})(2)$





MENYELESAIKAN MASALAH FUNGSI INVERS

Saat suatu permukaan besi berkarat, pertambahan area yang terkena karat cenderung melingkar seperti gambar di samping. Jika tidak segera ditangani, akan menyebabkan permukaan besi menjadi keropos atau bahkan berlubang. Misalkan berdasarkan hasil pengamatan, satu noktah karat di suatu permukaan besi, diameternya (dalam cm) setelah t bulan membentuk fungsi $D(t) = \frac{20t}{20-t}$

- Tentukan fungsi yang menyatakan bulan ketika diameter karat tersebut = D cm
- Jika diameter karat tersebut 5 cm, sudah berapa lama karat itu muncul?

PENYELESAIAN

Fungsi yang menyatakan diameter karat setelah t bulan adalah fungsi, maka fungsi yang menyatakan bulan ketika diameter karat tersebut = D cm adalah fungsi $D^{-1}(t)$

Sehingga,

$$D(t) = \frac{20t}{20-t}$$

$$y = \frac{20t}{20-t}$$

$$y(20-t) = 20t$$

$$20y - yt = 20t$$

$$20y = t(20+y)$$

$$t = \frac{20y}{20+y}$$

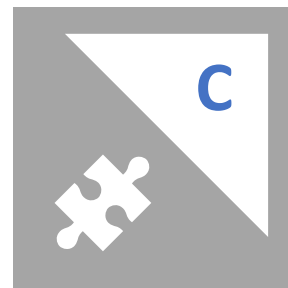
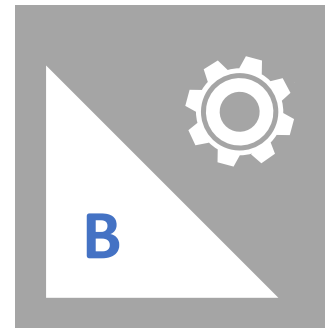
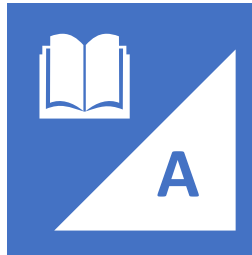
$$D^{-1}(y) = \frac{20y}{20+y}$$

$$D^{-1}(t) = \frac{20t}{20+t}$$

Misalkan $y = D(t)$, maka:

$$D^{-1}(D(t)) = t$$

$$D^{-1}(y) = t$$



Untuk $t = 5$, diperoleh:

$$D^{-1}(t) = \frac{20t}{20+t}$$

$$D^{-1}(5) = \frac{20 \cdot 5}{20+5}$$

$$D^{-1}(5) = \frac{100}{25} = 4$$

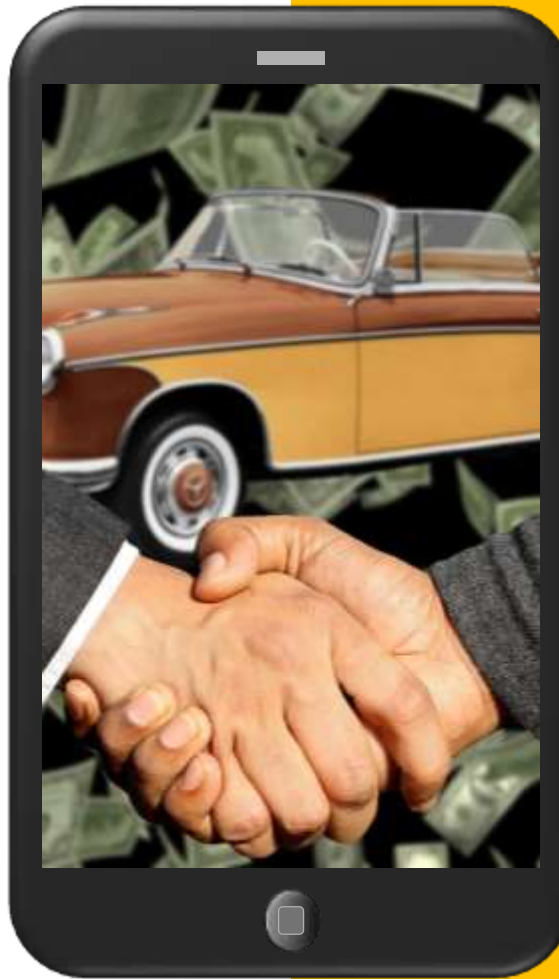
Jadi, jika diameter karat tersebut 5 cm, karat tersebut sudah muncul selama 4 bulan.

Jadi, fungsi yang menyatakan bulan ketika diameter

karat tersebut D cm adalah $D^{-1}(t) = \frac{20t}{20+t}$



Gaji yang diberikan kepada seorang sales mobil baru pada suatu dealer dinotasikan dengan fungsi $G(x) = Rp\ 1.000.000x + Rp\ 50.000,00$ dengan x banyak unit mobil yang dapat dijual pada bulan itu. Namun, gaji yang dibayarkan ini akan mendapat bonus 20% dari gaji jika target penjualan mobil pada bulan itu dapat sesuai target.



Misalkan total gaji yang dibayarkan jika seorang sales mendapat bonus untuk setiap penjualan dengan x gaji pokok dinotasikan dengan $B(x)$. Konstruksi fungsi $B(x)$, kemudian gunakan hasilnya untuk mengonstruksi fungsi komposisi untuk menotasikan total gaji yang diterima sales jika pada bulan itu ia mampu melampaui target penjualan.

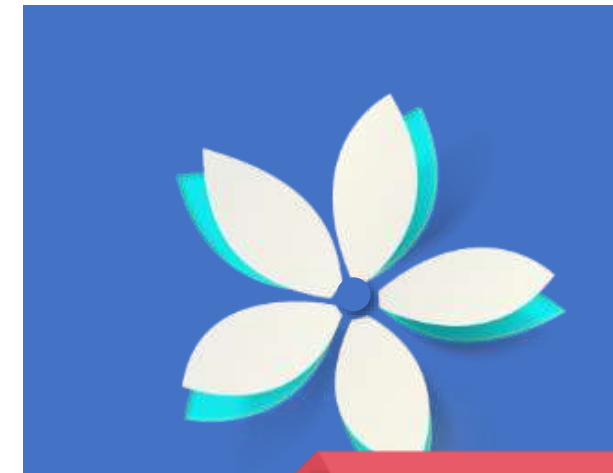




Pada industri kertas berbahan kayu, untuk setiap 3 ton kayu hanya akan menghasilkan kertas sebanyak 1 ton saja. Kertas seberat 1 ton ini jika dipotong beratnya akan sama dengan 400 rim kertas. Padahal, industri kertas di seluruh dunia menggunakan 35% dari seluruh panen kayu komersial setiap tahun.

Misalkan banyak kertas (dalam ton) untuk tiap x ton bahan kayu dinotasikan dengan $k(x)$, banyak kertas yang dihasilkan (dalam rim) untuk tiap x ton kertas yang diproduksi dinyatakan dengan $r(x)$, dan banyaknya kayu (dalam ton) yang diolah industri kertas di seluruh dunia untuk tiap x ton panen komersial kayu setiap tahun dinyatakan dengan fungsi $p(x)$.

Konstruksi fungsi $k(x)$, $r(x)$ dan $p(x)$, kemudian gunakan hasilnya untuk mengonstruksi fungsi komposisi untuk menotasikan banyaknya kertas yang dihasilkan (dalam rim) untuk tiap x ton panen komersial kayu setiap tahun.

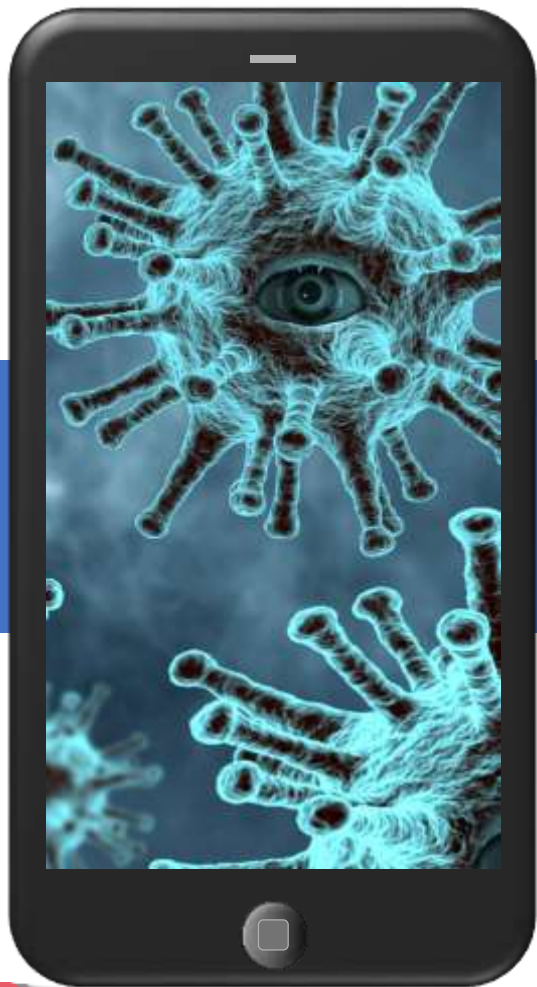




Perhatikan diskon sepatu di sebuah pusat perbelanjaan. Misalkan harga barang setelah diskon pertama dinotasikan dengan fungsi D_1 dan harga barang setelah diskon kedua dinotasikan dengan fungsi D_2

Konstruksi fungsi $D_1(x)$ dan $D_2(x)$, kemudian gunakan hasilnya untuk mengonstruksi fungsi komposisi yang menotasikan banyaknya uang yang harus dibayarkan (dalam rupiah) setelah didiskon dua kali untuk tiap x rupiah harga barang mula-mula.





Jumlah bakteri setelah dikeluarkan dari pendingin setelah x jam dirumuskan dengan $(B \circ T)(x) = 100x^2 + 120x + 156$ dengan $B(x)$ adalah banyaknya bakteri saat suhu makanan derajat dan $T(x)$ adalah suhu makanan setelah dikeluarkan dari pendingin selama x jam.



Jika $T(x) = 5x + 2$, tentukan fungsi $B(x)$ dan tuliskan interpretasinya.



Badan Kesehatan Dunia (WHO) merekomendasikan minimum kadar alcohol dalam sanitizer sebesar 60% agar efektif membasmi virus dan bakteri. Misalkan $A(x)$ menyatakan banyaknya alcohol (dalam mL) minimal untuk setiap botol hand sanitizer dengan netto x mL.

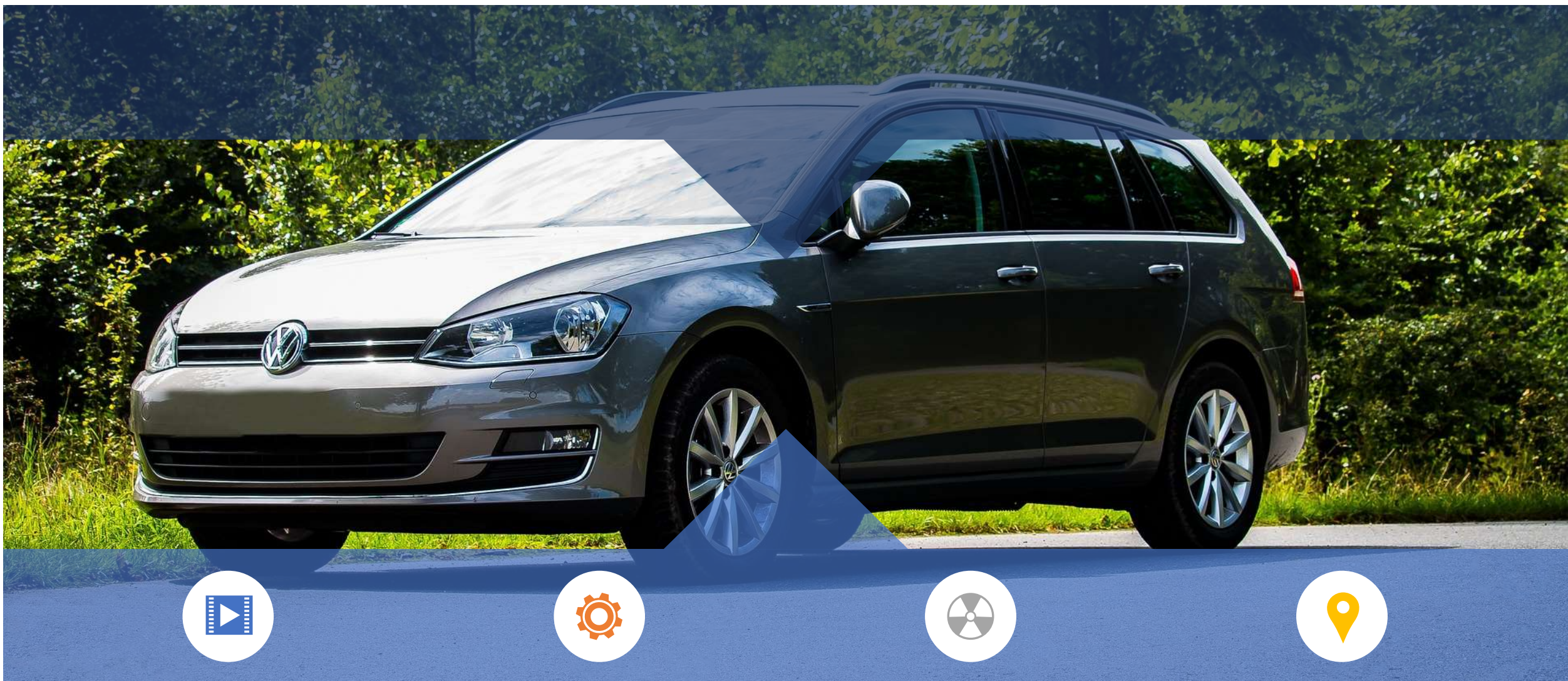
- a. Tentukan $A^{-1}(x)$
- b. Tentukan nilai dari $A^{-1}(480)$. Bagaimana interpretasi dari hasil yang diperoleh?



Seorang pembuat aplikasi menggunakan skema yang mengharuskan pengguna membayar Rp 40.000,00 setiap kali men-download aplikasi tersebut. Penghasilan pembuat aplikasi tersebut diperoleh dari hasil penjualan aplikasi dikurangi komisi untuk tool aplikasi yang besarnya 15% dari total hasil penjualan.

Jika fungsi f menotasikan hasil penjualan sebuah aplikasi yang di download x kali dan fungsi g menotasikan banyaknya pendapatan dari hasil penjualan sebanyak x rupiah, fungsi untuk menotasikan banyaknya pendapatan yang diterima pembuat aplikasi tersebut jika aplikasi buatannya di download sebanyak x kali adalah...





Divisi research and development (R&D) pada suatu produk mobil menyebutkan bahwa jika mobil dengan kecepatan x km/jam melakukan pengereman mendadak untuk menghindari kecelakaan, jarak pengereman, yaitu jarak antara posisi saat mobil berhenti (dalam m) dinotasikan dengan $J(x) = \frac{6.000}{5x-100}$.

Jika fungsi K menyatakan kecepatan sebelum melakukan pengereman jika diketahui jarak pengereman = y m, maka $F(x) =$