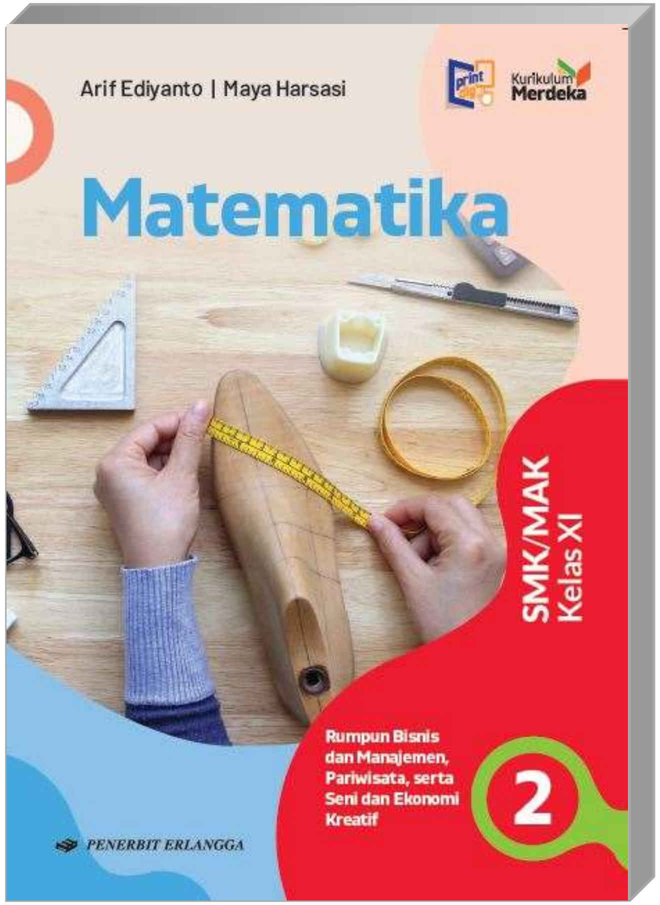


MEDIA MENGAJAR

Matematika

UNTUK SMK KELAS XI

BAB 3
Matriks

Peta Konsep

Matriks

- **Notasi**
- **Operasi**
- **Determinan dan Invers**

Notasi Matriks

Definisi

Elemen Matriks

Bilangan penyusun matriks

Matriks

Adalah susunan bilangan yang disusun dalam suatu jajaran berbentuk baris dan kolom.

Ordo Matriks

Adalah ukuran matriks yang dinyatakan dengan $m \times n$

m = Banyaknya baris
n = Banyaknya kolom

Contoh

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

Matriks Baris
Matriks yang hanya terdiri atas 1 baris

$B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Matriks Kolom
Matriks yang hanya terdiri atas satu kolom

$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Matriks persegi
Matriks yang banyak baris dan kolomnya sama.

$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Matriks diagonal
Matriks persegi yang elemen diagonal utamanya bukan 0 dan elemen lainnya adalah 0

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriks Identitas (I)
Adalah matriks persegi yang semua elemen diagonal utamanya bernilai 1, sedangkan matriks yang lain adalah 0

$F = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Matriks Segitiga
Adalah matriks persegi yang elemen-elemen dibawah atau di atas elemen diagonal utamanya bernilai 0

$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriks Nol
Adalah matriks persegi yang seluruh elemen-elemennya bernilai 0

Jenis Matriks

TRANSPOSE MATRIKS

$$A = m \times n$$
$$A^T = n \times m$$

Diperoleh dengan mengubah susunan baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris.

Tentukan transpose dari matriks

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Dua matriks dikatakan sama jika ordo dan semua elemen seletaknya sama.

Contoh:

Jika $\begin{pmatrix} 4 & 2x \\ y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

tentukan nilai x dan y

KESAMAAN MATRIKS

Penyelesaian:

$\boldsymbol{2x = 8}$

$\boldsymbol{x = 4}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2x \\ y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{y = -1}$

OPERASI MATRIKS

PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN MATRIKS

Syarat: ordo sama

Cara: Operasikan elemen yang seletak

PERKALIAN MATRIKS DENGAN SKALAR

Cara: Kalikan setiap elemen pada matriks tersebut.

Contoh:

Jika $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, tentukan nilai $C + 3D$

$$C + 3D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C + 3D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ -6 & 9 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C + 3D = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ -5 & 12 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$$

Asah Kemampuan

Ada dua tipe set meja kursi dari besi dan kayu yang akan dibuat, misalkan dengan model A dan B. Untuk membuat satu set meja kursi dari model A dibutuhkan 6 batang besi ukuran medium, 4 batang besi ukuran kecil, dan 5 papan kayu.

Untuk membuat satu set meja kursi dari model B dibutuhkan 7 batang besi ukuran medium, 3 batang besi ukuran kecil, dan 6 papan kayu. Ada supplier yang dapat memasok ketiga bahan tersebut dengan harga yang berbeda-beda.

Pada supplier I, harga besi ukuran medium Rp 70.000,00/batang, harga besi ukuran kecil Rp 50.000,00/batang, dan harga papan kayu Rp 50.000,00/lembar.

a. Sajikan data tersebut ke dalam matriks. Matriks pertama untuk menyajikan bahan yang dibutuhkan untuk membuat kedua model set meja kursi tersebut. Matriks kedua menunjukkan harga tiap bahan oleh masing-masing pemasok.

b. Dengan menggunakan matriks, tentukan biaya bahan baku yang harus disediakan untuk membuat tiap model.

Menyelesaikan Masalah tentang Operasi Matriks

01

Menganalisis teks untuk kemudian diubah dalam bentuk matriks

02

Memilih konsep operasi matriks yang sesuai

03

Melakukan prosedur penghitungan

04

Melakukan interpretasi hasil sesuai pertanyaan

Determinan & Invers Matriks

Misalkan terdapat matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{Det\ A} = |\boldsymbol{A}| = a_{11} \boldsymbol{.}\, a_{22} - a_{21} .\, a_{12}$$

$$\textbf{Invers } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{|A|} .\, \boldsymbol{adj}\ (\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{adj}\ (\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Contoh: diketahui matri*ks* $P = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Tentukan P^{-1}

$$P = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$|P| = (-5).1 - (-2).2$$
$$|P| = -5+4$$
$$|P| = -1$$

$$\text{Adj } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}.adj\ (P)$$
$$P^{-1} = \frac{1}{|-1|}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

DETERMINAN MATRIKS 3×3 (Metode Sarrus)

Misalkan terdapat matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{Det\ A} = |\boldsymbol{A}| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + \ - & - & - \end{array}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$|\boldsymbol{A}| = (a_{11}.a_{22}.a_{33}) + (a_{12}.a_{23}.a_{31}) + (a_{13}.a_{21}.a_{32}) - (a_{13}.a_{22}.a_{31}) - (a_{11}.a_{23}.a_{32}) - (a_{12}.a_{21}.a_{33})$$

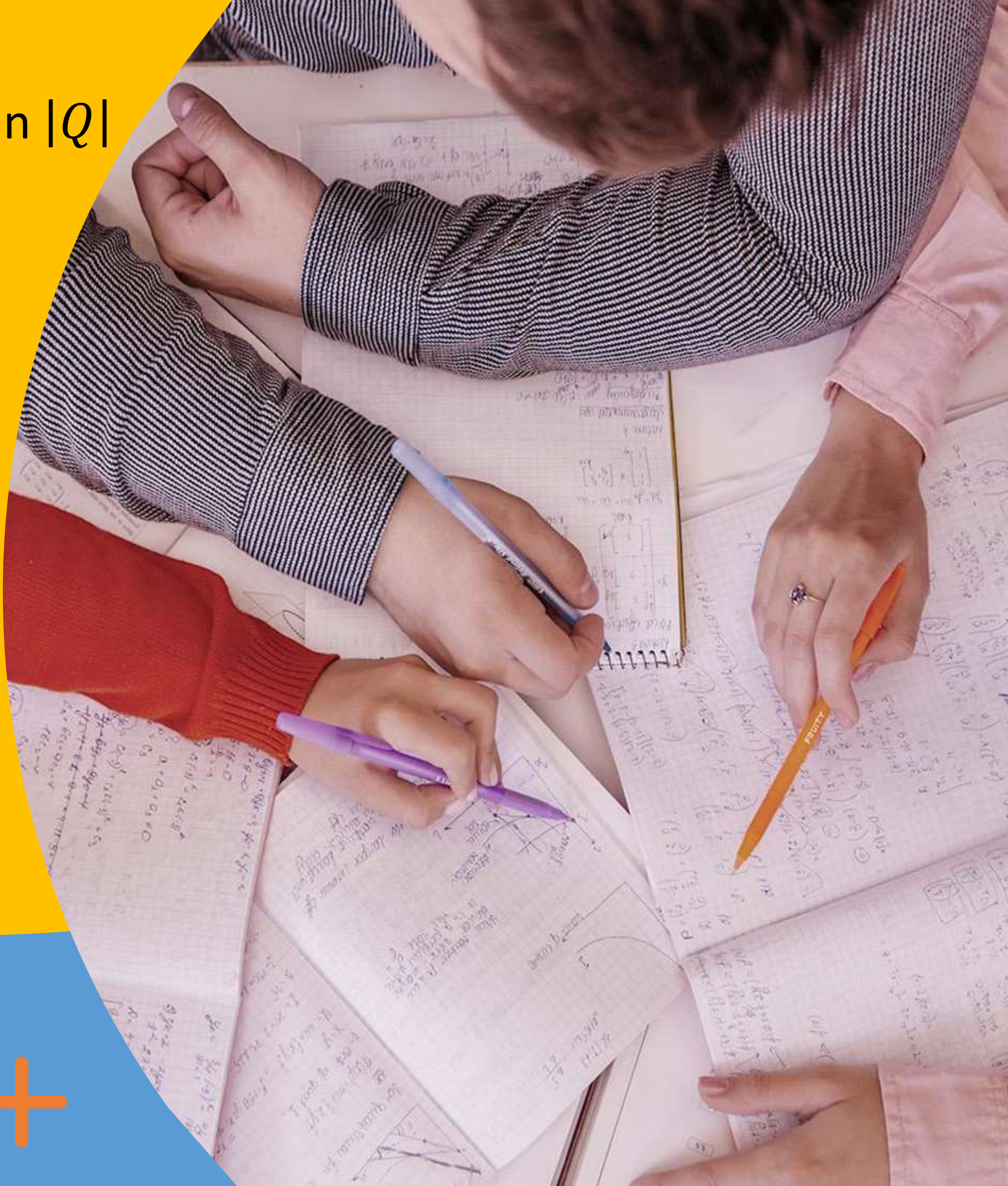
Diketahui matriks $Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, tentukan $|Q|$

$$|Q| = \left|\begin{matrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} + & + & + & - & - & - \end{matrix}$$

$$|Q| = \left|\begin{matrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

$$|Q| = (4.(-1).1) + (2.3.1) + (0.2.5)$$
$$-(0.(-1).1) - (4.3.5) - (2.2.1)$$
$$|Q| = -4 + 6 + 0 - 0 - 60 - 4$$
$$|Q| = -62$$



ADJOIN MATRIKS 3×3

Adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan kofaktor (C_{ij}) dari elemen-elemen matriks tersebut.

Jika terdapat matris A berordo 3x3, maka matriks

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Dengan C adalah kofaktor

Memangnya, minor itu apa?

$C_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$

Dengan:

C_{ij} = Kofaktor baris ke$-i$, kolom ke$-j$

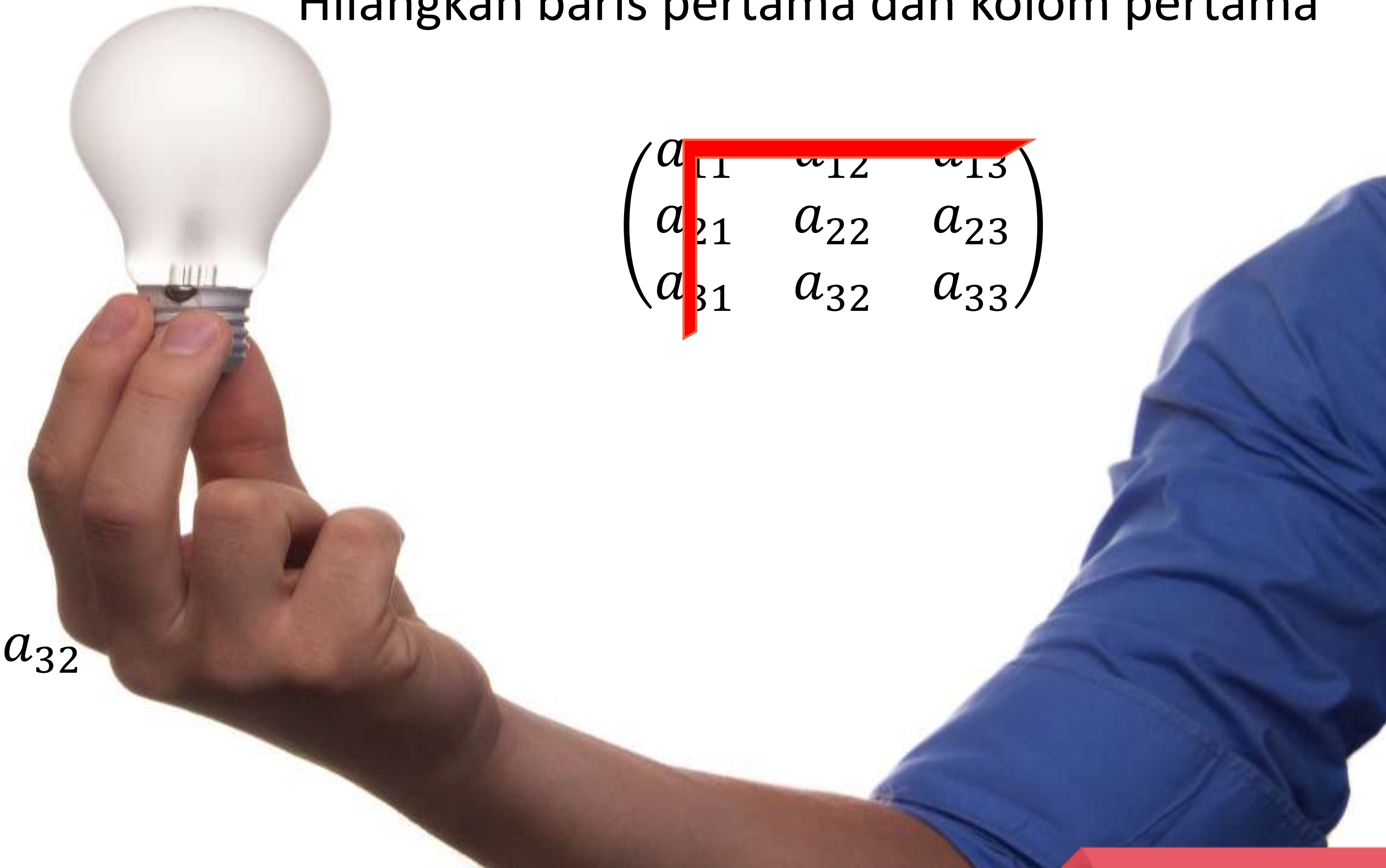
M_{ij} = Minor baris ke$-i$, kolom ke$-j$

Jika terdapat matris A berordo 3x3, **minor** (M_{ij}) dari matriks A adalah determinan submatriks A setelah baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dari matriks A dihilangkan.

Misalkan terdapat matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Hilangkan baris pertama dan kolom pertama

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}$$

Dan seterusnya...

INVERS MATRIKS 3×3

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} . adj\ (P)$$

Invers matriks bisa digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear

Misalkan diketahui matriks A dan matriks B. Matriks A merupakan matriks persegi yang memiliki invers

Jika $AX = B$

Maka untuk menentukan matriks X:

$$X = A^{-1}B$$
$$X = BA^{-1}$$

Selain menggunakan invers matriks, sistem persamaan linear juga bisa diselesaikan dengan aturan cramer

ATURAN CRAMER

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, i = 1, 2 \ldots, n$$

Dengan A_i adalah matriks yang dibentuk dengan mengganti elemen kolom ke$-i$ pada matriks A dengan elemen pada matriks B

Seorang pengusaha bubut menerima pesanan berbagai jenis spare part mesin seperti mur, baut, gear, dan lain sebagainya. Untuk mur berukuran kecil, harganya Rp 5.000,00/mur , sedangkan untuk mur berukuran sedang harganya Rp 7.000,00/mur.

Dalam sebulan terakhir, ada 500 pesanan mur ukuran kecil dan sedang dengan total pendapatan dari pembuatan mur Rp 2.900.000,00. Beraapa banyak mur ukuran kecil dan sedang yang dipesan ?

Penyelesaian

Misalkan:
x = banyak mur ukuran kecil
y = banyak mur ukuran sedang

$$x + y = 500$$
$$5.000x + 7.000y = 2.900.000$$

Maka:

$$\begin{pmatrix} 1x + 1y \\ 5.000x + 7.000y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 2.900.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5.0000 & 7.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 2.900.000 \end{pmatrix}$$

A A

$$|A| = 7.000 - 5.000 = 2.000$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 500 & 1 \\ 2.900.000 & 7.000 \end{vmatrix}$$

$$|A_1| = 500(7.000) - 1(2.900.000) = 600.000$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{600.000}{2.000} = 300$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 500 \\ 5.000 & 2.900.000 \end{vmatrix}$$

$$|A_2| = 1(2.900.000) - 500(5.000) = 400.000$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{400.000}{2.000} = 200$$

Jadi, banyak mur ukuran kecil dan sedang yang dipesan berturut-turut adalah 300 mur dan 200 mur.

Asah Kemampuan

Pemasangan kamera CCTV pada rumah pribadi telah menjadi tren untuk meningkatkan keamanan. Ada banyak paket pmasangan kamera CCTV yang ditawarkan di pasaran. Berikut adalah biaya alat dan pemasangan yang ditawarkan oleh sebuah perusahaan.

Set perlengkapan	Kamera Indoor	Kamera Outdoor	Biaya (Juta Rupiah)
1	1	1	2,1
1	1	2	2,3
1	2	2	2,45

Misalkan biaya pemasangan dan set perlengkapan untuk tiap paket sama. Tentukan harga:

a. Kamera indoor
b. Kamera outdoor
c. Set perlengkapan

Asah Kemampuan

Untuk membuat cairan pembersih kaca, pengrajin membuat campuran yang terdiri atas air suling (aquades), cuka dan alcohol 70%. Harga air suling Rp 10.000,00/liter, cuka Rp 50.000,00/liter, dan alkohol 70% Rp 50.000,00/liter. Untuk membuat 22 botol cairan dengan volume masing-masing 250 mL, diperlukan total biaya Rp 115.000,00 untuk membeli ketiga jenis cairan tersebut.

Jika perbandingan banyak cuka dan alkohol yang digunakan adalah $2:1$, tentukan komposisi tiap jenis cairan dalam tiap botolnya.

Asah Kemampuan

Matriks X menyatakan data stok baut mula-mula di sebuah took spare part

Jenis A (24)	Jenis B (18)	Jenis C (20)	Jenis D (15)
Jenis E (14)	Jenis F (12)	Jenis G (30)	Jenis H (25)
Jenis I (26)	Jenis J (14)	Jenis K (22)	Jenis L (19)

$$X = \begin{pmatrix} 24 & 18 & 20 & 15 \\ 14 & 12 & 30 & 25 \\ 26 & 14 & 22 & 19 \end{pmatrix}$$

Dalam seminggu, baut jenis D,H dan J terjual masing-masing 10 unit.

Jika stok di akhir minggu dinyatakan dengan operasi matriks $X - Y$, matriks $Y = \cdots$